UNIVERSITE CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR
❐❐◆❐❐
OFFICE DU BACCALAUREAT
E.mail : office@ucad.edu.sn
site web : officedubac.sn

21 T 37 AN01A9
Durée : 4 heures
Série : G– Coef. 5
Série : STEG – Coef. 4
Epreuve du 1er groupe

MATHEMATIQUES

CORRIGE

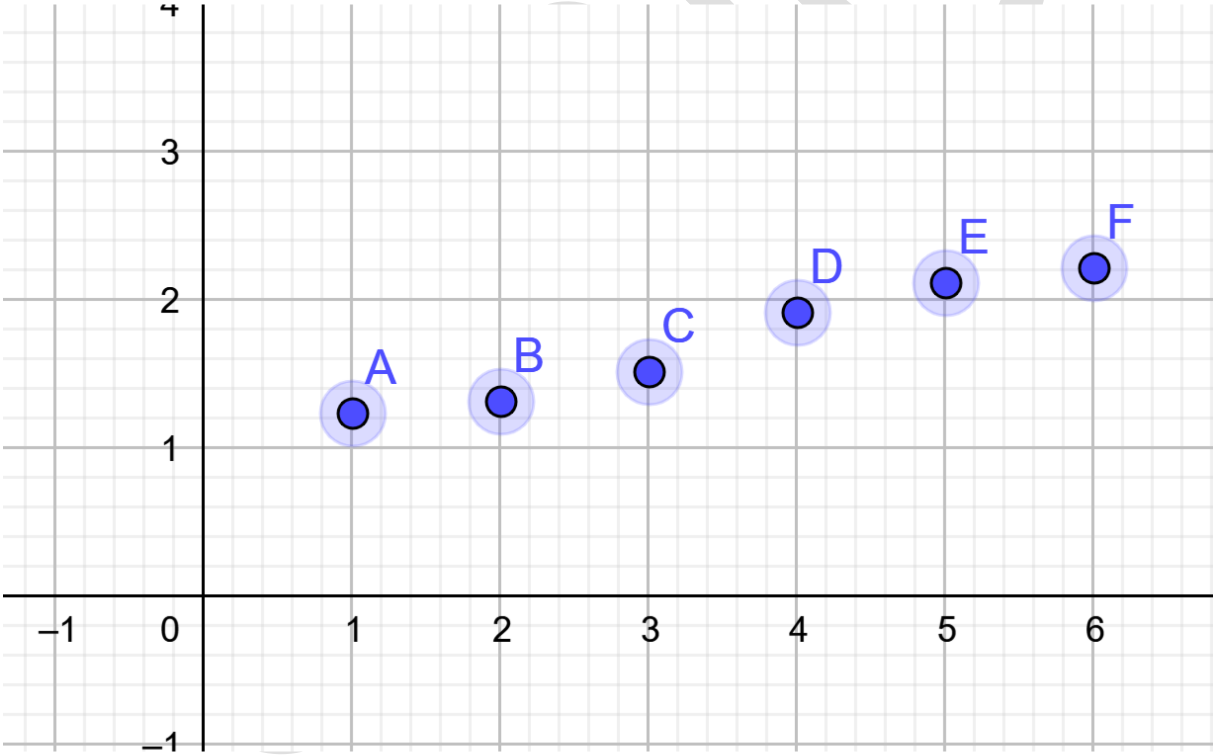
EXERCICE 1 (05 points)

N.B.: On présentera les résultats des calculs à 10^{-2} près.

Le gestionnaire d'un super marché, durant le premier semestre du démarrage de ses activités commerciales, observe l'évolution par mois x de son bénéfice y (en millions de francs CFA).
Les données obtenues sont contenues dans le tableau ci-après :

x	1	2	3	4	5	6
y	1,2	1,3	1,5	1,9	2,1	2,2

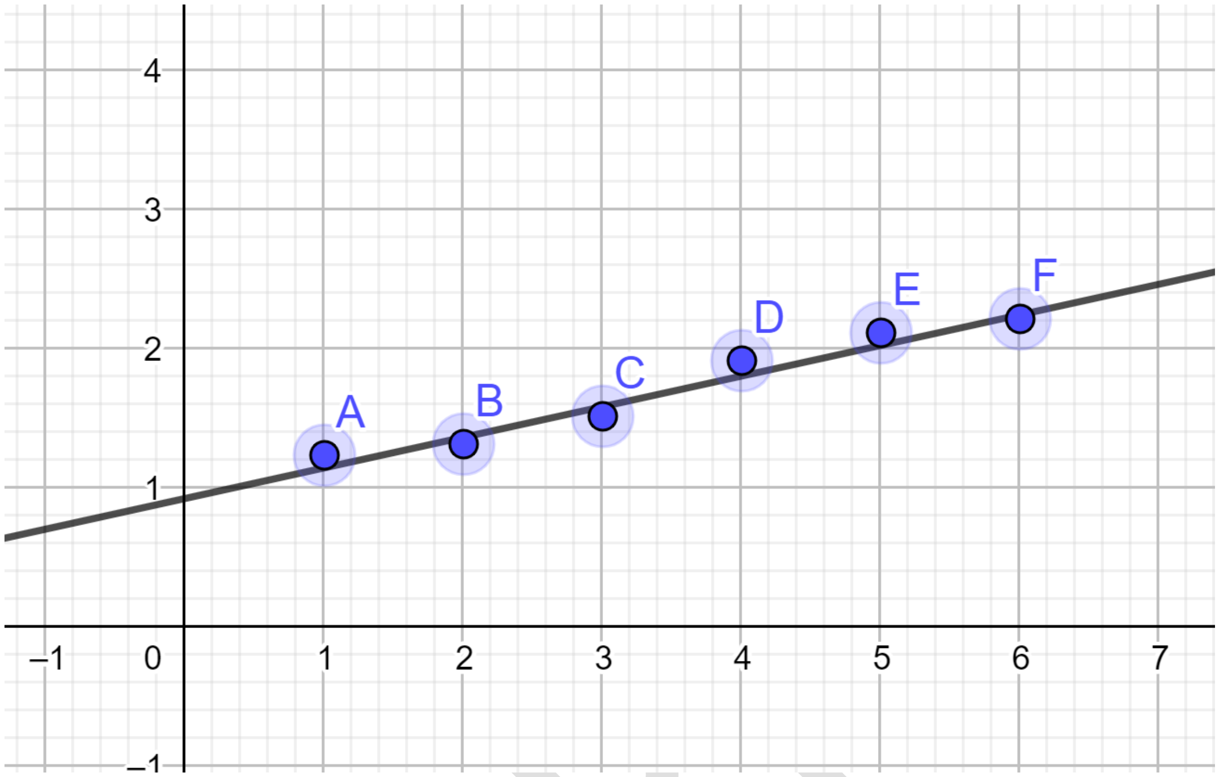
1) Représentons le nuage de points associé à cette série statistique. **(01 point)**



2) Etablissons l'équation (D) de la droite de régression de y en x par la méthode des moindres carrées. $\bar{x} = 3{,}5$;
$\bar{y} = 1{,}7$,; $V(x) = 2{,}91$; $Cov(x, y) = 0{,}65$ **(01,5 point)**

$$D_{y/x} : y = 0{,}22x + 0{,}91.$$

3) Représentons la droite de régression et placer le point moyen. **(01,25 point)**



4) Estimons graphiquement le profit au septième mois. **(0,5 point)**
Par estimation à partir du graphique, on obtient environ 2,45 millions de franc CFA

5) Vérifions ce résultat par le calcul. ***(0,75 point)***
Par le calcul, on a *:* $0{,}22 \times 7 + 0{,}91 = 2{,}45$ millions.

EXERCICE 2 **(05 points)**

Un emprunt est remboursable par annuités constantes.
Sachant que la somme du deuxième et du quatrième amortissement est 157 537,77 F et leur produit est 6 148 514 623,9,

1) Déterminons les deuxième et quatrième amortissements. Peut-on affirmer qu'ils vérifient chacun l'égalité $x^2 = 157\,537{,}77x - 6\,148\,514\,623{,}9$? **(3 x 0,5 points)**
les deuxième et quatrième amortissements, notés respectivement A_2 et A_4, vérifient :
$$\begin{cases} A_2 + A_4 = 157\,537{,}77 \\ A_2 \times A_4 = 6\,148\,514\,623{,}9 \end{cases}$$
La résolution de ce système donne : $A_2 = 71284{,}059\ F$ et $A_4 = 86253{,}711\ F$.

Peut-on affirmer qu'ils vérifient chacun l'égalité $x^2 = 157\,537{,}77x - 6\,148\,514\,623{,}9$?
Oui, car si deux nombres ont une somme égale à S et un produit égal à P, alors ils sont solutions de l'équation $x^2 - Sx + P = 0$.

2) Déterminons le taux d'intérêt i. **(01 point)**
On sait que $\frac{A_4}{A_2} = \mathbf{(1 + \boldsymbol{i})^2}$.
Or, $\frac{A_4}{A_2} = \frac{86253{,}711}{71284{,}059} = 1{,}20999$. On en déduit que $(1+i)^2 = 1{,}20999$ et par suite, $1 + i \approx 1{,}1$.
Il en résulte que : $i = 10\%$.

3) Déterminons le premier amortissement noté A_1. **(0,75 point)**

On a : $A_2 = (1+i)A_1$. On en déduit que $A_1 = \frac{A_2}{1+i} = \frac{71284{,}059}{1{,}1} = 64803{,}69\ F$.

4) Déterminons le nombre d'annuités n et la dette initiale D_0sachant que le montant de l'annuité est 114 803,69 F. **(01+0,75 points)**

Soit a l'annuité. On a $a = 114\,803{,}69$.

Or, $a = A_1(1+i)^n$. On en déduit que $(1+i)^n = \frac{a}{A_1}$. Il s'en suit que $n \times \ln(1+i) = \ln\left(\frac{a}{A_1}\right)$

C'est-à-dire $n = \frac{\ln\left(\frac{a}{A_1}\right)}{\ln(1+i)}$. D'où le nombre d'annuités est 6.

Calculons maintenant la dette initiale. On note A_p l'amortissement à la $p^{ième}$année.

$$\begin{aligned} D_0 &= A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 + A_6 \\ &= A_1 \times \frac{1-(1+i)^n}{1-(1+i)} \\ &= 64803{,}69 \times \frac{1{,}1^6 - 1}{0{,}1} \\ D_0 &= 500\,000\ F \end{aligned}$$

PROBLEME **(10 points)**

PARTIE A

Soit la fonction g définie par: $g(x) = (1-2x)e^{-x} - 1$ ·

1)

a. Donner le domaine de définition (D_g) de g. **(0,25 point)**

L'ensemble de définition de g est $D_g = \mathbb{R}$.

b. Déterminer les limites aux bornes du domaine de définition D_g. **(0,25 + 0,25 point)**

$\lim_{x \to -\infty} g(x) = +\infty$ et $\lim_{x \to +^2\infty} f(x) = -1$

2)

a. Calculer l'expression de la fonction dérivée $g'(x)$. **(01 point)**
La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = (2x-3)e^{-x}$.

b. Dressons le tableau de variation de g. **(0,5 point)**

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		-	0	+	
g	$+\infty$	↘	$\boxed{-2e^{-\frac{3}{2}} - 1}$	↗	-1

3)

a. Calculons $g(0)$. **(0,25 point)**

$$g(0) = 0$$

b. Déduisons-en le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x. **(0,25 point)**

Sur $]-\infty\,;0[$, $g(x) > 0$ et sur $+\infty$, $g(x) < 0$.

PARTIE B

Soit la fonction f définie par : $f(x) = 2xe^{-x} + e^{-x} - x$.

1) On note (C_f) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ avec $\|i\| = \|j\| = 1cm$ ·

a. Déterminons l'ensemble de définition de f. On le notera D_f. **(0,25 point)**

L'ensemble de définition de f est $D_f = \mathbb{R}$.

b. Déterminons les limites de f aux bornes de D_f. **(0,5+ 0,5 point)**

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+^2\infty} f(x) = -\infty$

c. Calculer l'expression de la fonction dérivée $f'(x)$ puis étudier son signe. **(01 + 0,5 point)**

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = g(x)$.
$f'(x)$ est du signe de $g(x)$.
Par conséquent, Sur $]-\infty\,;0[$, $f(x) > 0$, sur $+\infty$, $f(x) < 0$ et $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

d. Dressons le tableau de variation de f. **(0,5 point)**

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$+\infty$ $-\infty$	↗		↘	$-\infty$

$f(0) = 1$

e. Montrons que l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions dans $\mathbb{R}$. **(0,5 point)**

Sur $]-\infty\,;0[$, f est continue et strictement croissante. Elle réalise donc une bijection de $]-\infty\,;0[$ vers $]-\infty\,;1[$. Or, $0 \in\,]-\infty\,;1[$, donc l'équation $f(x) = 0$ admet une seule solution sur $]-\infty\,;0[$.
Sur $[0\,;\,+\infty[$, f est continue et strictement décroissante. Elle réalise donc une bijection de $[0\,;\,+\infty[$ vers $]-\infty\,;1[$. Or, $0 \in\,]-\infty\,;1[$, donc l'équation $f(x) = 0$ admet une seule solution sur $[0\,;\,+\infty[$.
En définitive, l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions dans $\mathbb{R}$.

f. Montrons que la droite (D): $y = -x$ est une asymptote oblique à (C_f) en $+\infty$. **(0,25 point)**

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - (-x) = \lim_{x\to+\infty} = 2xe^{-x} + e^{-x} = 0.$$

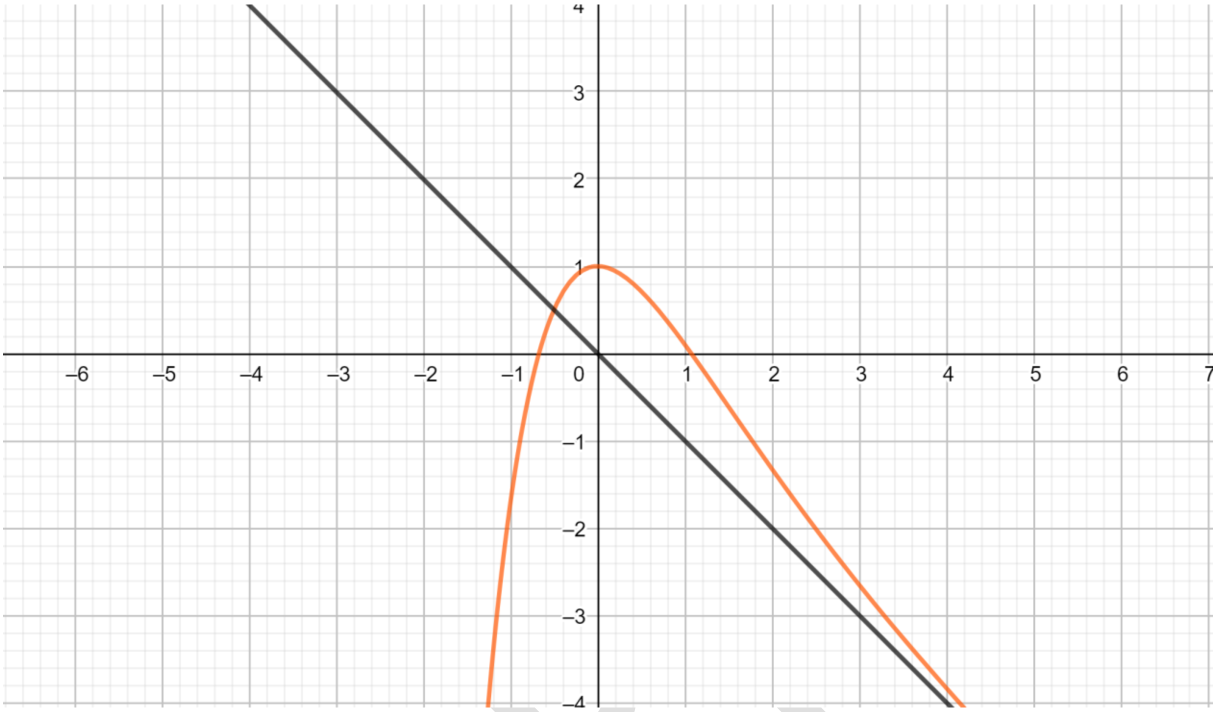
On en déduit que que la droite (D): $y = -x$ est une asymptote oblique à (C_f) en $+\infty$.

g. Etudions la position relative de (C_f) par rapport à (D). **(0,5 point)**

$f(x) - (-x) = 2xe^{-x} + e^{-x} = e^{-x}(2x + 1)$. Ainsi :

Sur $\left]-\infty\,;\,-\frac{1}{2}\right[$, (C_f) est en dessous de (D) et sur$\left]-\frac{1}{2}\,;\,+\infty\right[$ (C_f) est au dessus de (D).

h. Traçons les courbes (C_f) et (D) dans le repère $(O\,;\,\vec{\imath},\vec{\jmath})$. **(0,75+ 0,25 point)**



2) Soit h la restriction de f sur $]0;+\infty[$.

a. Montrons que h est bijective de $]0;+\infty[$ vers un intervalle J à préciser. **(0,25 +0,25 point)**

f est continue et strictement décroissante. Elle réalise donc une bijection de $[0\,;\,+\infty[$ vers $]-\infty\,;1[$

b. Calculons $h(1)$, en déduire $(h^{-1})'(3e^{-1}-1)$. **(0,25 +0,75 point)**

$h(1) = 3e^{-1} - 1$.

$$(h^{-1})'(3e^{-1}-1) = \frac{1}{h'(1)} = \frac{1}{-e^{-1}-1} = \frac{-1}{e^{-1}+1}$$

c. Traçons la courbe $(C_{h^{-1}})$ dans le repère $(O\,;\,\vec{\imath},\vec{\jmath})$. **(0,25 point)**